Aufgabe 19 Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)},\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos(x)},\qquad \text{c)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\exp(x)},\qquad \text{d)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3)}{\sqrt{2x}}.$$

Hinweis: Eventuell ist die L'Hôpital'sche Regel nützlich.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Nenner und Zähler gehen gegen Null. Mit der Regel von L'Hôpital erhält man

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1}.$$

b) Die zu untersuchende Funktion ist bei 0 definiert und stetig, sie nimmt dort den Wert 0 an.

c) Mit der Regel von L'Hôpital erhält man

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\exp(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp(x)}=0.$$

d) Mit L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3)}{\sqrt{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}\cdot 3x^2}{\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{x}}=0.$$

Aufgabe 20 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{a)}\ \lim_{x\overset{>}{\to}0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\qquad\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}=0\quad \text{für } a>0,\ k\in\mathbb{N}.$$

Hinweis: Betrachten Sie statt der Funktion selbst ihren Logarithmus bzw. ihre k-te Wurzel. Verwenden Sie dann die L'Hôpital'sche Regel.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Es gilt:

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{1+x}=1.$$

Also ist der in der Aufgabe gesuchte Limes gleich $e^1=e$.

b) Wir beachten den Hinweis und berechnen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[k]{a^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^{\frac{x}{k}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\exp(\frac{x}{k}\cdot\ln a)}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp(\frac{x}{k}\cdot\ln a)\cdot\frac{1}{k}}=0.$$

Bemerkung: Beide Aussage sind wichtige Grenzwerte; die zweite kann man sich durch den Merksatz "Exponentiale wachsen schneller als Potenzen" gut einprägen.

Aufgabe 21

a) Stellen Sie die Formel für die Kapitalentwicklung bei nachschüssiger Zahlung so um, dass Sie einen Ausdruck für das Anfangskapital K_0 erhalten.

b) Es soll ein Betrag K_0 auf einem Konto mit einem Zinssatz von 4% p.a. angelegt werden, so dass bei einer Auszahlung von 50.000 € jeweils zum Jahresende frühestens nach 99 Jahren das Kapital aufgebraucht ist. Berechnen Sie, welches Anfangskapital K_0 dazu mindestens angelegt werden muss.

Lösung zu Aufgabe 21

a) Die Formel aus der Vorlesung lautet

$$K_n = q^n \cdot K_0 + r \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

die gesuchte Formel ist also

$$K_0 = q^{-n} \cdot \left(K_n - r \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \right).$$

b) Wir haben $q = 1{,}04$, $n = 99$, $r = 50.000$ €, $K_n = 0$ €. Man erhält aus der obigen Formel

$$K_0 \approx 1.224.259{,}95 \text{ €}.$$

Aufgabe 22 Beweisen Sie die in der Vorlesung hergeleitete Formel

$$K_n = q^n \cdot K_0 + r \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

für den Endwert einer Rente bei vorschüssiger Zahlung mithilfe des Beweisprinzips der vollständigen Induktion.

Lösung zu Aufgabe 22 Wir gehen wie folgt vor: Wir zeigen zunächst

$$K_n = q^n \cdot K_0 + r \cdot \sum_{i=1}^{n} q^i$$

durch vollständige Induktion. Zuerst prüfen wir nach, ob die Formel für K_1 richtig ist (Induktionsanfang): Nach einem Jahr hat man das Kapital $q \cdot (K_0 + r)$, dies entspricht der Formel für $n = 1$.

Nun nehmen wir an, dass die Formel für K_{n-1} richtig ist und leiten daraus die Formel für K_n her (Induktionsschritt):

$$\begin{aligned} K_n &= q \cdot (K_{n-1} + r) = \\ &= q \cdot \left(q^{n-1} \cdot K_0 + r \cdot \sum_{i=1}^{n-1} q^i + r \right) = \\ &= q^n \cdot K_0 + r \cdot q \cdot \sum_{i=\mathbf{0}}^{n-1} q^i = \\ &= q^n \cdot K_0 + r \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die geometrische Summenformel angewendet.

Knobelaufgabe Während das Umordnen einer konvergenten Folge nichts am Konvergenzverhalten oder am Limes ändert (siehe Knobelaufgabe auf Blatt 4), gilt für Reihen folgende verblüffende Aussage: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, dann kann man die Reihe so umordnen dass sie gegen jeden beliebigen Grenzwert konvergiert, genauer: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent und sei $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_{\sigma(n)} = c$$

gilt. Beweisen Sie diese Aussage.

Zur Lösung der Knobelaufgabe Dies ist der sogenannte Riemannsche Umordnungssatz. Eine kurze Begründung finden Sie z.B. hier.