Aufgabe 15 Sei
$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+2x-3}.$$
Bestimmen Sie
$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} f(x), \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 1} f(x).$$

Lösung zu Aufgabe 15

a) Es gilt
$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+2x-3} = x \cdot \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}.$$
Der linke Faktor geht gegen ∞, der rechte gegen 1. Insgesamt folgt, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

b) Die Funktion ist stetig bei 0 und es gilt $f(0) = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$.

c) Sowohl Zähler als auch Nenner sind gleich Null für $x = 1$. Durch Polynomdivision kann man von beiden den Linearfaktor $(x-1)$ abspalten:
$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^2+3x+2}{x+3}.$$
Der letzte Term ist eine bei $x = 1$ stetige Funktion, die dort den Wert
$$\frac{x^2+3x+2}{x+3} = \frac{1+3+2}{1+3} = \frac{3}{2}$$
annimmt.
Alternativ: Mit der Regel von L'Hôpital (wird später in der Vorlesung erklärt).

Aufgabe 16 Entscheiden Sie, ob die folgende Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist:
$$x \mapsto \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$
Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 16 Es ist nur zu untersuchen, ob
$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$
existiert und gleich Null ist, denn an den Punkten $x \neq 0$ ist die Stetigkeit klar.

Für $x \neq 0$ gilt $|f(x)| = |x \cdot \sin(\frac{1}{x})| = |x| \cdot |\sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \cdot 1$ und daher existiert der obige Limes und ist gleich Null.

Aufgabe 17 Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \log_b(x)$, für $b > 0$;
b) $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$;
c) $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
d) $f(x) = x^x$;

Lösung zu Aufgabe 17

a) Es gilt $f(x) = \log_b(x) = \ln(x)/\ln(b)$ und damit folgt $f'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$.
b) Produktregel:
$$f'(x) = 1 \cdot \sin(\frac{1}{x}) + x \cos(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2} = \sin(\frac{1}{x}) - \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x}.$$
c) Wir benutzen die Formel $x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln(x))$. Damit erhalten wir, unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel:
$$f'(x) = \exp(\alpha \cdot \ln(x)) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$
d) Es gilt $x^x = \exp(x \cdot \ln(x))$. Die Ableitung bilden wir unter Beachtung von Ketten- und Produktregel:
$$f'(x) = \exp(x \cdot \ln(x)) \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1).$$

Aufgabe 18

a) Rechnen Sie direkt anhand der Definition nach (ohne die üblichen Ableitungsregeln zu verwenden), dass die Funktion $f\colon x \mapsto x^3$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie aus Ihrer Rechnung auch die Ableitung.
b) Beweisen Sie die Ableitungsregel $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Wir berechnen eine Sekantensteigung. Es gilt, mit dem binomischen Lehrsatz:
$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \xrightarrow[h \to 0]{} 3x^2.$$

Der Limes existiert also für beliebiges $x \in \mathbb{R}$, was die Differenzierbarkeit zeigt, und sein Wert $3x^2$ ist der Wert der Ableitung $f'(x)$.

b) Wir nehmen an, dass f und g bei x differenzierbar sind und rechnen nach:

$$\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Da beide Funktionen differenzierbar sind, existiert der Limes für $h \to 0$ auf der rechten Seite,