Aufgabe 10

a) Berechnen Sie: $\log_2(16)$, $\log_3(27)$, $\lg(100.000)$.
b) Berechnen Sie $e = e^1$ näherungsweise, indem Sie die ersten fünf Summanden der Exponentialreihe addieren. Vergleichen Sie mit dem exakten Wert von e.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $\log_2(16) = 4$, $\log_3(27) = 3$, $\lg(100.000) = 5$.
b) Man erhält $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{24+24+12+4+1}{24} = \frac{65}{24} = 2{,}708\bar{3}$.
Zum Vergleich: $e \approx 2{,}7183$.

Aufgabe 11 Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

(Im Ergebnis kann e vorkommen.)

Lösung zu Aufgabe 11 Die erste Reihe ist die Exponentialreihe, wobei -1 eingesetzt und der 0-te Summand weggelassen wurde, also erhält man den Reihenwert $\frac{1}{e} - 1$.
Die zweite ist eine geometrische Reihe, es ergibt sich mit der Summenformel für die geometrische Reihe der Grenzwert $\frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$.

Aufgabe 12 Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

$$\sum_{k=0}^{\infty} 7^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 7^{-k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k)}{2^k}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Die erste Reihe divergiert, da 7^k keine Nullfolge ist.
b) Die zweite Reihe ist eine geometrische Reihe $\sum^\infty q^k$ mit $q = \frac{1}{7}$, also konvergent.
c) Die dritte Reihe lässt sich betragsmäßig durch eine geometrische Reihe abschätzen, also konvergiert sie (sogar absolut).
d) Bei der vierten Reihe lassen sich die Summanden von unten gegen die der harmonischen Reihe abschätzen, d.h. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, also divergiert die Reihe.

Aufgabe 13 Welche Folgen sind konvergent?

a) $a_n = \frac{(n^2+1)(n^3-1)}{4n^5-7n^3}$,
b) $b_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+n}$,
c) $c_n = \frac{n^2}{n+3}$,
d) $d_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2n}$.

Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $a_n = \frac{(n^2+1)(n^3-1)}{4n^5-7n^3} = \frac{n^5-n^2+n^3-1}{4n^5-7n^3} = \frac{1-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^5}}{4-\frac{7}{n^2}} \to \frac{1}{4}$.
b) $b_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+n} = \frac{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{0}{1} = 0$.
c) $c_n = \frac{n^2}{n+3} = n \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{n}} \to \infty$.
d) Mit Hilfe der binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:
$d_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2n} = \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}} = \frac{n^2+n-n^2-2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}} = \frac{-n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}} = \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} \to -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 14 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit positiven Reihengliedern, d.h. es gilt stets $a_k > 0$. Begründen Sie, warum dann folgendes richtig ist: Die Reihe konvergiert entweder oder divergiert bestimmt gegen ∞.

Lösung zu Aufgabe 14 Entweder ist die Partialsummenfolge beschränkt, dann handelt es sich bei ihr um eine monotone und beschränkte, also konvergente, Folge, oder die Partialsummenfolge ist unbeschränkt, dann geht die Reihe gegen ∞.