Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie alle Abbildungen $\{1,2\} \to \{3,4\}$.
b) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1, \quad g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto (n-2)^2+1, \quad h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto z+1.$$

c) Bestimmen Sie alle bijektiven Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$.
d) Sei $M = \{1,2,3,4,5\}$ und $N = \{1,2,3,4\}$ und sei $F\colon M \to N$ gegeben durch

$$1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 4,\ 5 \mapsto 3.$$

Bestimmen Sie $f(M)$, $f(\{1,2,3,4\})$ und $f^{-1}(\{2,3\})$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Es gibt vier verschiedene solche Abbildungen:
- $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 3$;
- $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$;
- $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 3$;
- $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 4$.

b) Die Abbildung f ist injektiv, nicht surjektiv, g ist weder injektiv noch surjektiv, h ist injektiv und surjektiv.
c) Es gibt sechs davon:

x	1	2	3
$f(x)$	1	2	3

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	1

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	2

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	2

x	1	2	3
$f(x)$	3	2	1

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	3

d) Es gilt $f(M) = \{1,3,4\}$, $f(\{1,2,3,4\}) = \{1,4\}$ und $f^{-1}(\{2,3\}) = \{5\}$.

Aufgabe 7 Welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent?

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.
b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.
c) $a_n = n^n$.
d) $a_n = n^{-n}$.

Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Es gilt $a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to 1$, die Folge konvergiert also gegen 1.
b) Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ divergiert. Begründung z.B.: Würde sie konvergieren, so würde auch $(-1)^n = a_n - \frac{1}{n}$ konvergieren, Widerspruch!.
c) Die Folge $a_n = n^n$ divergiert bzw. divergiert bestimmt gegen $+\infty$. Denn es gilt stets $n^n \geq n$.
d) Die Folge $a_n = n^{-n}$ konvergiert gegen Null, denn es gilt $a_n \leq \frac{1}{n}$ (und diese Folge geht gegen Null).

Aufgabe 8 Berechnen Sie:

$$\sum_{i=0}^{15} \frac{1}{2^n}.$$

Lösung zu Aufgabe 8 Es gilt:

$$\sum_{i=0}^{15} \frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{16}}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{65535}{65536} = \frac{65535}{32768} \approx 1.99997.$$

Aufgabe 9 In ein Bankkonto werden am Anfang jedes Jahres 1.500 € eingezahlt. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit 3% verzinst.

a) Wie hoch ist das Guthaben nach 25 Jahren?
b) Nach wie vielen Jahren übersteigt das Guthaben erstmals den Betrag von 20.000 €?

Lösung zu Aufgabe 9

a) Die in der Vorlesung hergeleitete Formel ergibt 1500 € $\cdot\, q \cdot \frac{q^{25}-1}{q-1} \approx$ 56.329,56 €.
b) Wir setzen an: $q^k \geq \frac{20000}{1500} \cdot \frac{q-1}{q} + 1 \approx 1,388\ldots$, also $k \geq \left(\frac{\ln 1{,}388\ldots}{\ln q}\right) \approx 11,1$. Also ist der Kontostand nach 12 Jahren zum ersten Mal höher als 20.000 €.