Aufgabe 1

a) Schreiben Sie als Dezimalbruch: $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{7}$. Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, mit m und n teilerfremd: 0,001; $0{,}0\bar{9}$; $\frac{108}{459}$.

b) Welche der folgenden Zahlen sind rational:

$$a = \sqrt{7}, \quad b = \sum_{k=1}^{100} \frac{k^7}{k+1}, \quad c = \sqrt{256}\ ?$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 1

a) 0,6; $0{,}\bar{1}$; $0{,}\overline{428571}$; $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{4}{17}$.

b) $\sqrt{7}$ ist nicht rational, Beweis wie in der Vorlesung; die zweite Zahl ist rational, da sie die Summe von rationalen Zahlen ist; $c = 16$ ist rational.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Menge der reellen Zahlen, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|x+7| + 2x - |4x| \geq 0.$$

Lösung zu Aufgabe 2 Die kritischen Stellen liegen bei $x = -7$ und $x = 0$. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall (a) $x \leq -7$: Dann ist die Ungleichung äquivalent zu $-x - 7 + 2x + 4x \geq 0 \iff x \geq \frac{7}{5}$.

Fall (b) $-7 \leq x \leq 0$: Dann ist die Ungleichung äquivalent zu $x + 7 + 2x + 4x \geq 0 \iff x \geq -1$.

Fall (c) $0 \leq x$: Dann ist die Ungleichung äquivalent zu $x+7+2x-4x \geq 0 \iff x \leq 7$.

Insgesamt erhält man die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathrm{a}} \cup \mathbb{L}_{\mathrm{b}} \cup \mathbb{L}_{\mathrm{c}} = \emptyset \cup [-1, 0] \cup [0, 7] = [-1, 7]$.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie:

$$\sum_{p=3}^{4} p^2, \quad \prod_{k=-2}^{1} (k^2+1), \quad \prod_{n=-999}^{888} n.$$

b) Berechnen Sie 9998^2 mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\sum_{p=3}^{4} p^2 = 9 + 16 = 25$, $\prod_{k=-2}^{1}(k^2+1) = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 20$, $\prod_{n=-999}^{888} n = 0$ (da der Faktor 0 vorkommt).

b) $(10000-2)^2 = 100000000 - 2 \cdot 10000 \cdot 2 + 4 = 99960004$.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die Anzahl der 3-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit Hilfe des Binomialkoeffizienten.
b) Ermitteln Sie alle 3-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
c) Bestimmen Sie die Anzahl der 6-elementigen Teilmengen einer Mengen mit 49 Elementen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$
b)

$$\{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \\ \{1,4,6\}, \{1,5,6\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}, \{2,5,6\}, \\ \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}\}.$$

c) $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{6!} = 13983816.$

Aufgabe 5 Wir betrachten

$$s(n) := \sum_{k=1}^{n} k,$$

d.h. $s(n)$ ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, z.B. gilt $s(4) = 1+2+3+4 = 10$. Wir wollen den Beweis führen, dass die Formel

$$s(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt. Gehen Sie beim Beweis wie folgt vor: Setzen Sie $g(n) := \frac{1}{2}n(n+1)$. Überprüfen Sie, dass die Formel für $n = 1$ gilt, dass also $s(1) = g(1)$ richtig ist. Rechnen Sie nun nach, dass stets gilt: $g(n+1) = g(n) + n + 1$. Warum zeigt dies, dass $s(n) = g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist?

Lösung zu Aufgabe 5 Die Formel ist richtig für $n = 1$, denn $s(1) = 1$ und $g(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$. Wir berechnen nun $g(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)n + (n+1)$. Die Formel stimmt also für $n = 1$ und beim Übergang von n zu $n+1$ erhöht sich der Wert von $g(n)$ um $n+1$, genau wie bei $s(n)$. Also ist die Formel für alle natürlichen Zahlen n richtig.

Bemerkung: Dies ist ein Beispiel für das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion.*