Aufgabe 43 Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit dem Gauß-Algorithmus und mit der Regel von Sarrus (Jägerzaunregel).

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 3 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 44 Lösen Sie die beiden linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 45 Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln

$$1002^2, \quad 997 \cdot 1003, \quad 1,02^3$$

Aufgabe 46 Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^2; \quad g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto z^2; \quad h: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, (z, n) \mapsto \frac{z}{n}.$$

Aufgabe 47 Welche Folgen sind konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \frac{n^2 + 4n}{2(n+1)^2}, \quad b_n = \frac{(n+3)^2}{(n+2)^3}, \quad c_n = \frac{n^2}{\ln(2^n)}, \quad d_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}.$$

Aufgabe 48 In ein Bankkonto werden am Anfang jedes Jahres 1.000 € eingezahlt. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit $p\%$ verzinst, $p \in [0, 100]$.

- Nach 2 Jahren beträgt das Guthaben 2.152,5 €. Wie hoch ist der Zinssatz p ?
- Wie hoch ist das Guthaben nach 20 Jahren?
- Wie hoch müsste die jährliche Einzahlung mindestens sein, wenn das Guthaben nach 20 Jahren mindestens 50.000 € betragen soll?

Aufgabe 49 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cos(n)}.$$