Aufgabe 39 Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der darstellenden Matrix A . Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die Bilder der Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und zeichnen Sie diese.

- a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 40 Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Ermitteln Sie gegebenenfalls die darstellende Matrix (Hinweis: Betrachten Sie die Bilder der Einheitsvektoren e_1, e_2)

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 3x - 4y$
- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}$
- c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ y - x \end{pmatrix}$
- d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x + 3xy$
- e) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ 2y \end{pmatrix}$
- f) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto |x| + |y|$

Aufgabe 41 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 &= 4. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= -2 \\2x_1 + 3x_2 &= 4.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 3 \\-2x_1 - 4x_2 &= 6.\end{aligned}$$

Aufgabe 42

a) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Es seien $0_n = (0, \dots, 0)^t$ bzw. $0_m = (0, \dots, 0)^t$ die Nullvektoren im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie

$$f(0_n) = 0_m.$$

b) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, das die Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

als Lösungsmenge hat.