

**Aufgabe 35** Gegeben sei die Funktion  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x - 1$ .

- Hat  $f$  eine Nullstelle im Intervall  $[0, 1]$ ?
- Berechnen Sie die ersten drei Iterierten des Newtonverfahrens zum Startwert  $x_0 = 0$ .
- Konvergiert das Verfahren in b)? Falls nein, begründen Sie, warum nicht.

**Aufgabe 36** Gegeben sei die Funktion  $f(x) = x^2 - x - 1$ . Wir wollen die positive reelle Nullstelle von  $f$  mit dem Newtonverfahren approximieren.

- Bestimmen Sie ein Intervall  $[a, b]$  mit  $0 \leq a < b$  welches eine Nullstelle von  $f$  enthält.
- Prüfen Sie, ob das Newtonverfahren in diesem Intervall anwendbar ist und berechnen Sie die ersten drei Iterierten.
- Die positive Nullstelle von  $f$  ist  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . Vergleichen Sie die Näherung mit dem exakten Wert der Nullstelle.

**Aufgabe 37**

- Berechnen Sie das folgende Matrixprodukt:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- Spiegelt man die Einträge einer Matrix  $A$  an der Diagonalen erhält man eine neue Matrix, genannt die Transponierte  $A^t$  von  $A$ , z.B.  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ . Bilden

Sie von den beiden Matrizen aus Aufgabe a) die Transponierten und berechnen Sie dann deren Produkt. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe a).

- Zeigen Sie: Für das Skalarprodukt  $\langle x, y \rangle$  zweier Vektoren  $x, y$  gilt

$$\langle x, y \rangle = x^t y.$$

**Aufgabe 38** Gegeben seien die folgenden Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad B := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Welche Produkte von jeweils zwei der obigen Matrizen sind definiert?
- Berechnen Sie  $B \cdot C$  und  $C \cdot B$  und vergleichen Sie die Ergebnisse.
- Welche multiplikative Eigenschaft hat die Matrix  $I_3$ ? (Bestimmen Sie hierzu einige Produkte von  $I_3$  mit anderen der obigen Matrizen)
- Wir vertauschen in  $I_3$  die zweite und dritte Spalte. Diese neue Matrix nennen wir

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $A \cdot E$  und  $E \cdot A$ . Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Matrix  $A$ .