Aufgabe 27 Eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt eine Lösung der Wellengleichung, wenn für ihre zweiten partiellen Ableitungen folgende Gleichheit gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Dabei ist $c > 0$ eine reelle Konstante. Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = \cos(ky - \omega x)$ mit Konstanten $k, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega > 0$. Für welche Wahl der Konstanten k, ω ist f eine Lösung der Wellengleichung?

Aufgabe 28 Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

a) $f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \ln(xy) - xy^3.$
b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = x \cdot e^{-y^2}.$
c) $h\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad h(x,y) = \dfrac{\cos(xy)}{x^2 y}$ (hier nur die ersten partiellen Ableitungen).

Aufgabe 29 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_1^2 x^3 - 2x + 1 \,\mathrm{d}x.$
b) $\displaystyle\int_0^1 e^x + e^{-x} \,\mathrm{d}x.$
c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x) \,\mathrm{d}x.$

Aufgabe 30 Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $[a,b]$ ein Intervall. Leiten Sie die folgende Formel für die *partielle Integration* her.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Hinweis: Benutzen Sie die Produktregel aus der Differentialrechnung für die Funktion $f(x)g(x)$ und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Knobelaufgabe Finden Sie eine Stammfunktion für folgende Funktionen

$$f(x) = xe^{(x^2)}; \qquad g(x) = \sin(x)\cos(x); \qquad h(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \text{für } x > 1 \text{ und festes } n \in \mathbb{N}.$$