Aufgabe 23

a) In einer Nährlösung befinden sich Hefezellen. Das Wachstum lässt sich durch eine Funktion der Form $t \mapsto K_0 \cdot e^{at}$ beschreiben, wobei K_0 die Anzahl der Zellen zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt. Nach 9 Stunden habe sich die Anzahl verzehnfacht. Bestimmen Sie die Wachstumsrate a, wenn als Zeiteinheit Stunden verwendet werden.
b) Das Plutonium-Isotop ^{239}Pu hat eine Halbwertszeit von 24.110 Jahren. Berechnen Sie, welcher Prozentsatz nach 100 Jahren zerfallen ist.
c) Lässt sich eine 4,20m lange, gerade Stange in einem quaderförmigen Container mit den Innenabmessungen L 3,20m B 1,80m H 1,80m verstauen, ohne sie zu verbiegen?

Aufgabe 24 Sei die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Begründen Sie, warum die Funktionen $x \mapsto f(x,y)$ und $y \mapsto f(x,y)$, die man erhält, wenn man f auf achsenparallele Geraden im $\mathbb{R}^2$ einschränkt, stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind.
b) Sei eine Folge im $\mathbb{R}^2$ definiert durch $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Konvergiert die Folge $f(a_n)$, und wenn ja, was ist der Limes?
c) Entscheiden Sie, ob f stetig ist.

Aufgabe 25 Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y,z) = y \cdot e^x \cdot \sin(x) + e^{\cos(z)}$.

a) Berechnen Sie: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.
b) Berechnen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)$. Vergleichen Sie Ihre beiden Ergebnisse.
c) Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$. Entscheiden Sie, welche der beiden folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ harmonisch ist:

$$f(x,y) = e^x \cdot \cos(y), \qquad g(x,y) = \sin(x) \cdot \cos(y).$$

Aufgabe 26 Betrachten Sie die folgenden Funktionen $(0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x + y;$$
$$g\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = xy.$$

Skizzieren Sie die “Höhenlinien”, auf denen die Funktion jeweils konstant ist.