

Aufgabe 19 Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos(x)}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3)}{\sqrt{2x}}.$$

Hinweis: Eventuell ist die L'Hôpital'sche Regel nützlich.

Aufgabe 20 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{a) } \lim_{x \searrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \quad \text{für } a > 0, k \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Betrachten Sie statt der Funktion selbst ihren Logarithmus bzw. ihre k -te Wurzel. Verwenden Sie dann die L'Hôpital'sche Regel.

Aufgabe 21

- a) Stellen Sie die Formel für die Kapitalentwicklung bei nachschüssiger Zahlung so um, dass Sie einen Ausdruck für das Anfangskapital K_0 erhalten.
- b) Es soll ein Betrag K_0 auf einem Konto mit einem Zinssatz von 4% p.a. angelegt werden, so dass bei einer Auszahlung von 50.000 € jeweils zum Jahresende frühestens nach 99 Jahren das Kapital aufgebraucht ist. Berechnen Sie, welches Anfangskapital K_0 dazu mindestens angelegt werden muss.

Aufgabe 22 Beweisen Sie die in der Vorlesung hergeleitete Formel

$$K_n = q^n \cdot K_0 + r \cdot q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

für den Endwert einer Rente bei vorschüssiger Zahlung mithilfe des Beweisprinzips der vollständigen Induktion.

Knobelaufgabe Während das Umordnen einer konvergenten Folge nichts am Konvergenzverhalten oder am Limes ändert (siehe Knobelaufgabe auf Blatt 4), gilt für Reihen folgende verblüffende Aussage: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, dann kann man die Reihe so umordnen dass sie gegen jeden beliebigen Grenzwert konvergiert, genauer: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent und sei $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_{\sigma(n)} = c$$

gilt. Beweisen Sie diese Aussage.