

Aufgabe 15 Sei

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 3}.$$

Bestimmen Sie

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

Aufgabe 16 Entscheiden Sie, ob die folgende Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist:

$$x \mapsto \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 17 Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = \log_b(x)$, für $b > 0$;
- b) $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
- c) $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- d) $f(x) = x^x$;

Aufgabe 18

- a) Rechnen Sie direkt anhand der Definition (ohne die üblichen Ableitungsregeln zu verwenden), dass die Funktion $x \mapsto x^3$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie aus Ihrer Rechnung auch die Ableitung.
- b) Beweisen Sie die Ableitungsregel $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Knobelaufgabe Untersuchen Sie die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit.