Aufgabe 10

a) Berechnen Sie: $\log_2(16)$, $\log_3(27)$, $\lg(100.000)$.
b) Berechnen Sie $e = e^1$ näherungsweise, indem Sie die ersten fünf Summanden der Exponentialreihe addieren. Vergleichen Sie mit dem exakten Wert von e.

Aufgabe 11 Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

(Im Ergebnis kann e vorkommen.)

Aufgabe 12 Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

$$\sum_{k=0}^{\infty} 7^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 7^{-k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k)}{2^k}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 13 Welche Folgen sind konvergent?

a) $a_n = \frac{(n^2+1)(n^3-1)}{4n^5-7n^3}$,
b) $b_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+n}$,
c) $c_n = \frac{n^2}{n+3}$,
d) $d_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2n}$.

Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 14 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit positiven Reihengliedern, d.h. es gilt stets $a_k > 0$. Begründen Sie, warum dann folgendes richtig ist: Die Reihe konvergiert entweder oder divergiert bestimmt gegen ∞.

Knobelaufgabe Begründen Sie, warum das Umordnen einer konvergenten Folge nichts an der Konvergenz und am Grenzwert ändert, d.h. begründen Sie, warum folgende Aussage gilt: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge und sei $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann konvergiert auch die durch $b_n := a_{s(n)}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.