

Übungsblatt 3

Aufgabe 11:

Unter dem goldenen Schnitt versteht man die Aufteilung einer Strecke der Länge a in Teilstrecken der Längen b und c mit $b \geq c$, so dass

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

- Zeigen Sie, dass der goldene Schnitt mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.
- Nutzen Sie a) aus, um ein reguläres 5-Eck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Anleitung: Ausgehend von einer Strecke der Länge a , die im goldenen Schnitt mit Längen $b > c$ geteilt ist, konstruiere man ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit Schenkellänge b und Basislänge c . Man verwende dann einen Schenkel dieses Dreiecks als Basis eine neuen gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basiswinkel mit den Basiswinkel des Dreiecks ABC übereinstimmen. Beweisen Sie mit Hilfe des neuen Dreiecks, dass ein Basiswinkel des Dreiecks ABC genau 72 Grad beträgt.

Aufgabe 12:

Zeigen Sie: Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ist das reguläre $m \cdot n$ -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar, dann auch das reguläre m -Eck und das reguläre n -Eck. Die Umkehrung gilt, wenn $\text{ggT}(m, n) = 1$ ist.

Aufgabe 13:

Sei $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von abzählbaren Mengen. Zeigen Sie: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ ist abzählbar.

Leiten Sie daraus einen von der Vorlesung verschiedenen Beweis ab, dass die Menge der algebraischen Zahlen \mathbb{A} abzählbar ist.

Aufgabe 14:

Für $m \in \mathbb{N}_o$ sei $F_m := 2^{2^m} + 1$ die m -te Fermatsche Zahl. Zeigen Sie: Für $m \neq n$ haben F_m und F_n keine gemeinsamen Primteiler.

Bemerkung: Dies liefert einen auf Polya zurückgehenden Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 15:

Im Ring $\mathbb{Z}(\sqrt{-26})$ gilt

$$3^3 = (1 + \sqrt{-26}) \cdot (1 - \sqrt{-26}).$$

Zeigen Sie, dass $3, 1 + \sqrt{-26}, 1 - \sqrt{-26}$ irreduzibel sind. Sind sie auch prim? Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die für $m \in \mathbb{Z}$ durch

$$N(a + b\sqrt{m}) := (a + b\sqrt{m}) \cdot (a - b\sqrt{m})$$

definierte Normabbildung von $\mathbb{Z}(\sqrt{m}) \rightarrow \mathbb{Z}$ multiplikativ ist, d.h. es gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}(\sqrt{m})$, dass $N(\alpha) \cdot N(\beta) = N(\alpha \cdot \beta)$ ist. Nutzen Sie dies für den Beweis der Irreduzibilität aus.