Institut für Geometrie und Topologie
W. Kimmerle

Übungen zu Gruppen- und Darstellungsringen

WS16/17

Aufgabe 19: Berechnen Sie die gewöhnliche Charaktertafel der symmetrischen Gruppe S_4.
Hinweis: Es bietet sich an, zunächst jene von S_3 zu bestimmen und die irreduziblen Darstellungen der S_3 dann als irreduzible Darstellungen der S_4 zu betrachten.

Aufgabe 20: Sei $X(G)$ die gewöhnliche Chraktertafel einer endlichen Gruppe G, also

$$X(G) := (\chi_i(g_j)) \, ,$$

wobei χ_i die irreduziblen Charaktere sind und g_j Repräsentanten der Konjugiertenklassen von G. Zeigen Sie:
a) Es gibt genau eine Zeile, die aus lauter Einsen besteht (dies muss dann die Zeile des trivialen Chrakters von Grad 1 sein).
b) Es gibt genau ein Spalte, in der jeder Eintrag eine natürliche Zahl ist, die betragsmäßig $\geq$ als jeder Eintrag von $X(G)$ ist, der in der gleichen Zeile wie diese natürliche Zahl steht (diese Spalte muss dann die Spalte der Charaktergrade sein).
Man kann also o.B.d.A. annehmen, dass die erste Zeile einer gewöhnlichen Charaktertafel vom trivalen Charakter vom Grad 1 und die erste Spalte von der Konjugiertenklasse des trivialen Elementes indiziert wird.

Aufgabe 21: Zu jeder Spalte der gewöhnlichen Charaktertafel $X(G)$ einer endlichen Gruppe, indiziert von der Klasse C_i mit Repräsentant g_i kann man die Ordnung des Zentralisator $C_G(g_i)$ berechnen und damit die Länge der Klasse C_i.

Aufgabe 22: Zu jedem irreduziblen Chrakter χ_i, kann man aus der gewöhnlichen Charaktertafel $X(G)$ bestimmen, welche Konjugiertenklassen im Kern von χ_i liegen und somit die Ordnung von $Ker\chi_i$ bestimmen.
Hierbei ist $Ker\chi_i := \{g \in G; \chi_i(g) = \chi_i(1_G)\}$.

Aufgabe 23: Sei G eine Gruppe mit $X(G) = X(S_4)$. (Man nennt zwei Charaktertafeln gleich, wenn sie nach geeigneter Permutation von Zeilen und Spalten identisch sind). Zeigen Sie, dass dann $G \cong S_4$ ist.
Berechnen Sie hierzu mittels Aufgaben 21 und 22 die Längen der Klassen und die Ordnung der Kerne der Charaktere.