Institut für Geometrie und Topologie
W. Kimmerle

Übungsblatt 3

Übungen zu Gruppen- und Darstellungsringen

SS12

Aufgabe 11: Berechnen Sie von der Quaternionengruppe Q_8 alle ESSP (extremely strong Shoda pairs) und mit diesen alle zentral primitiven Idempotente von $\mathbb{Q}Q_8$. .

Aufgabe 12: Sei K ein Körper mit Charakteristik $\chi(K) \neq 2$. Eine K - Algebra A wird Quaternionenalgebra über K genannt, wenn es $a, b \in K^*$ und eine K - Basis $\{1, i, j, k\}$ von A gibt, so dass die Relationen

$$i^2 = a, j^2 = b, k = i \cdot j = -j \cdot i$$

gelten. Schreibweise: $A = \left(\frac{a,b}{K}\right)$.

a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto \bar{x} := x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$$

ist eine Involution (d.h. ein selbstinverser Antiringisomorphismus).

b) Zeigen Sie. Das Zentrum von A ist $K \cong K \cdot 1$.

c) Die Abbildung $N : A \longrightarrow K, x \mapsto x \cdot \bar{x}$ wird Norm genannt. Zeigen Sie: N ist multiplikativ.

d) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $A \cong M_2(K)$.

(ii) $N(x) = 0$ für ein $x \neq 0$ von A.

(iii) $u^2 = av^2 + bw^2$ für ein $(u, v, w) \in K \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ entweder ein Schiefkörper oder ein Matrixring über K ist.

Aufgabe 13: Beschreiben Sie $\mathbb{Z}Q_8$ als Teilring von

$$\mathbb{Q}Q_8 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times H,$$

wobei $H = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{Q}}\right)$ die klassische Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$ ist.
Berechnen Sie alle Einheiten von $\mathbb{Z}Q_8$.