Übungsblatt 2

Aufgabe 6:

a) Zeigen Sie, dass $u = -1 + t + t^4$ eine Einheit von $\mathbb{Z}C_5$ ist. (Hierbei ist $C_5 =< t >$ die zyklische Gruppe der Ordnung 5.) Ist u eine Torsionseinheit ?
b) Zeigen Sie: In $\mathbb{Z}C_2$ gibt es nur triviale Einheiten.

Aufgabe 7:

Bezeichne C_4 die zyklische Gruppe der Ordnung 4. Überprüfen Sie, ob $\mathbb{Q}C_4$ isomorph ist zu

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad \text{oder zu} \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[i] \quad \text{oder zu} \quad \mathbb{Q}[i] \times \mathbb{Q}[i].$$

Aufgabe 8:

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Geben Sie entweder ein Gegenbeispiel oder einen Beweis an.
Sei G eine perfekte Gruppe.

(i) Es gibt einen surjektiven Ringhomomorphismus von $\mathbb{Q}G$ auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

(ii) Es gibt einen surjektiven Ringhomomorphismus von $\mathbb{Q}G$ auf

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gibt bis auf Isomorphie nur einen $\mathbb{Q}G$ -Modul mit $\mathbb{Q}$ - Dimension 1.

(iv) Ist φ eine treue $\mathbb{Q}$ - Darstellung von G vom Grad 2, dann ist φ irreduzibel.

Aufgabe 9:

Ein kommutativer Ring heisst lokal, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt. Sei G eine abelsche p - Gruppe und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Ist $\mathbb{F}_pG$ lokal ?
Zeigen Sie hierzu zuerst:
$x = \sum_{g\in G} k_g g$ mit $\sum_{g\in G} k_g \neq 0$ ist eine Einheit.

Aufgabe 10:

Sei K ein Körper und C_3 die zyklische Gruppe mit drei Elementen. Berechnen Sie alle Idempotente von KC_3 (in Abhängigkeit der Charakteristik von K und der Anzahl dritter Einheitswurzeln, die K besitzt). Für welche Körper ist

$$KC_3 \cong K \times K \times K?$$