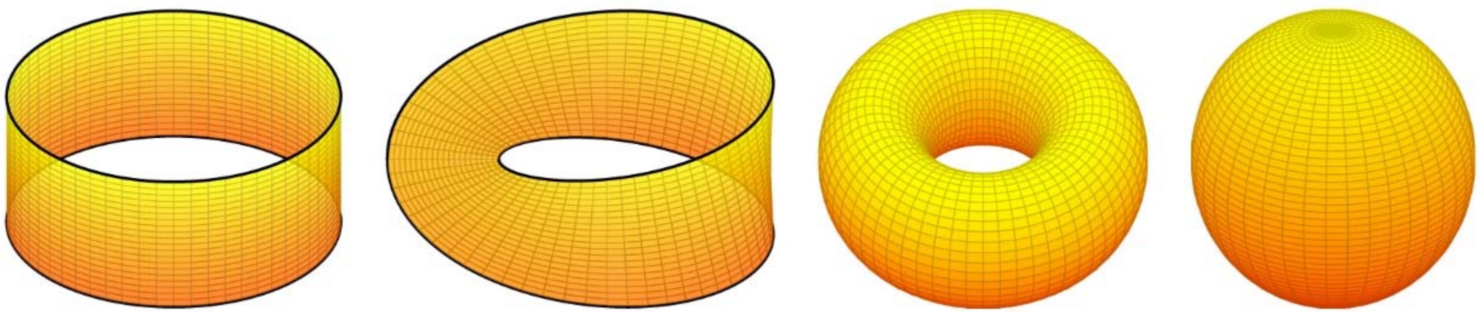
Profillinie Geometrie und Topologie

Wintersemester 2020/2021



Dozentinnen und Dozenten:

Prof. Uwe
Semmelmann

Themen
Differentialgeometrie, Dirac-Operatoren, Anwendungen der Darstellungstheorie kompakter Lie-Gruppen

Prof. Michael
Eisermann

Themen
Spieltheorie, Topologie, Knotentheorie und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten

Apl. Prof. Andreas
Kollross

Themen
Wirkungen von Lie-Gruppen in der Riemannschen Geometrie, homogene und symmetrische Räume

Priv. Doz. Dr.
Anda Degeratu

Themen
Differentialgeometrie - von der Physik motivierte geometrische Probleme, Geometrische Analysis, Anwendung von PDE, komplexer und algebraischer Geometrie

Profillinie Geometrie und Topologie

Wissenschaftlicher Hintergrund: Geometrie

In der Geometrie untersucht man Eigenschaften von Räumen (Mannigfaltigkeiten), die in der Umgebung jedes Punktes aussehen wie der euklidische Raum R^n. Im Unterschied zum R^n erlaubt man aber eine kompliziertere Topologie und eine interessantere Geometrie (Krümmung).

Ziel ist es Analysis auf gekrümmten Objekten, z.B. einer Kugeloberfläche, zu ermöglichen. Dafür benötigt man die abstrakte Sprache von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, Tangentialräumen, Vektorfeldern und Differentialformen. Lösungen von partiellen Differentialgleichungen (PDE) können als Schnitte von Vektorbündeln im Kern von Differentialoperatoren (z.B. dem Laplace- oder Dirac-Operator) beschrieben werden.

Die Existenz von Lösungen hängt dann in interessanter Weise von der Geometrie und Topologie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeiten ab. So entspricht z.B. der Kern des Laplace-Operators auf Differentialformen genau der sogenannten deRham-Kohomologie. Das Studium topologischer Invarianten (z.B. der Euler-Charakteristik) gestattet es, Aussagen zu machen über Lösungen von PDEs und damit über die Existenz geometrischer Strukturen.

Die Motivation für differentialgeometrische Begriffsbildungen kommen oft aus der Physik, z.B. Relativitätstheorie oder der Stringtheorie.

Die Mannigfaltigkeiten und damit die Geometrie werden interessanter durch Zusatzstrukturen, z.B. Symmetrien, abstrakt beschrieben durch Gruppenwirkungen. Hier spielt auch die Darstellungstheorie eine große Rolle. Andere wichtige Zusatzstrukturen sind Tensoren, die gewisse Differentialgleichungen erfüllen, z.B. Einstein-Metriken oder Kähler-Strukturen.

Nach der Vorlesung Topologie werden die Grundlagen der Differential-Geometrie in der Vorlesung "Differential-Geometrie" eingeführt. Die Aspekte von Krümmung werden dann in den Vorlesungen zur Riemannschen Geometrie behandelt. Dafür gibt es verschiedenen Varianten: Homogene Räume, Relativitätstheorie, Differentialoperatoren.

Profillinie Geometrie und Topologie

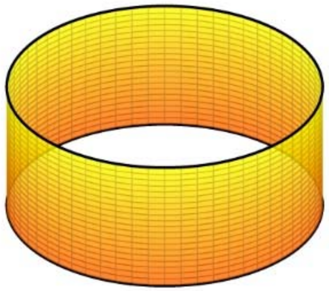
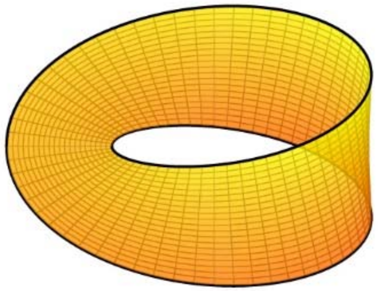
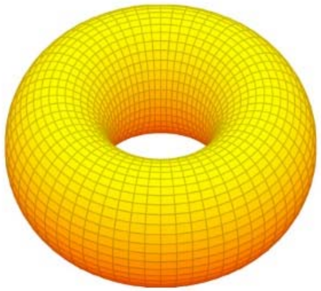
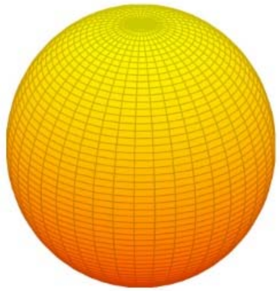
Wissenschaftlicher Hintergrund: Topologie

Die Topologie (griechisch τόπος [tópos] ‚Ort' und λόγος [lógos] ‚Lehre') ist wörtlich übersetzt die „Lehre vom Ort" und handelt von der Form und gegenseitigen Lage geometrischer Objekte, wie etwa Kurven und Flächen im Raum. Die obigen Bei-spiele illustrieren einige geometrische Fragestellungen und erste erfolgreiche Anwendungen.

Dank ihrer vielseitig einsetzbaren Begriffe und Methoden ist die Topologie neben Analysis und Algebra eine der Grundstrukturen der modernen Mathematik und liefert Werkzeuge, um eine Vielzahl sehr unterschiedlicher Phänomene zu behandeln. Sie untersucht grundlegende Konzepte wie Konvergenz und Stetigkeit, offene und abgeschlossene Mengen, Zusammenhang und Kompaktheit, lokale vs globale Eigenschaften, Fundamentalgruppen und Überlagerungen, usw. Hierdurch steht sie in enger Wechselwirkung mit der Analysis, der Geometrie und der Algebra. Die Vorlesung vermittelt hierzu die notwendigen Grundlagen.

Als mathematische Disziplin ist die Topologie eine Schöpfung des 20. Jahrhunderts – und damit relativ jung. Sie wurde schnell zum mathematischen Grundwissen, vor allem Dank ihrer spektakulären Erfolge in vielfältigen Anwendungen und Verzwei-gungen (analytische, geometrische, algebraische Topologie...).

In Einstein's general relativity the structure of space can change but not its topology. Topology is the property of something that doesn't change when you bend it or stretch it as long as you don't break anything.
Edward Witten

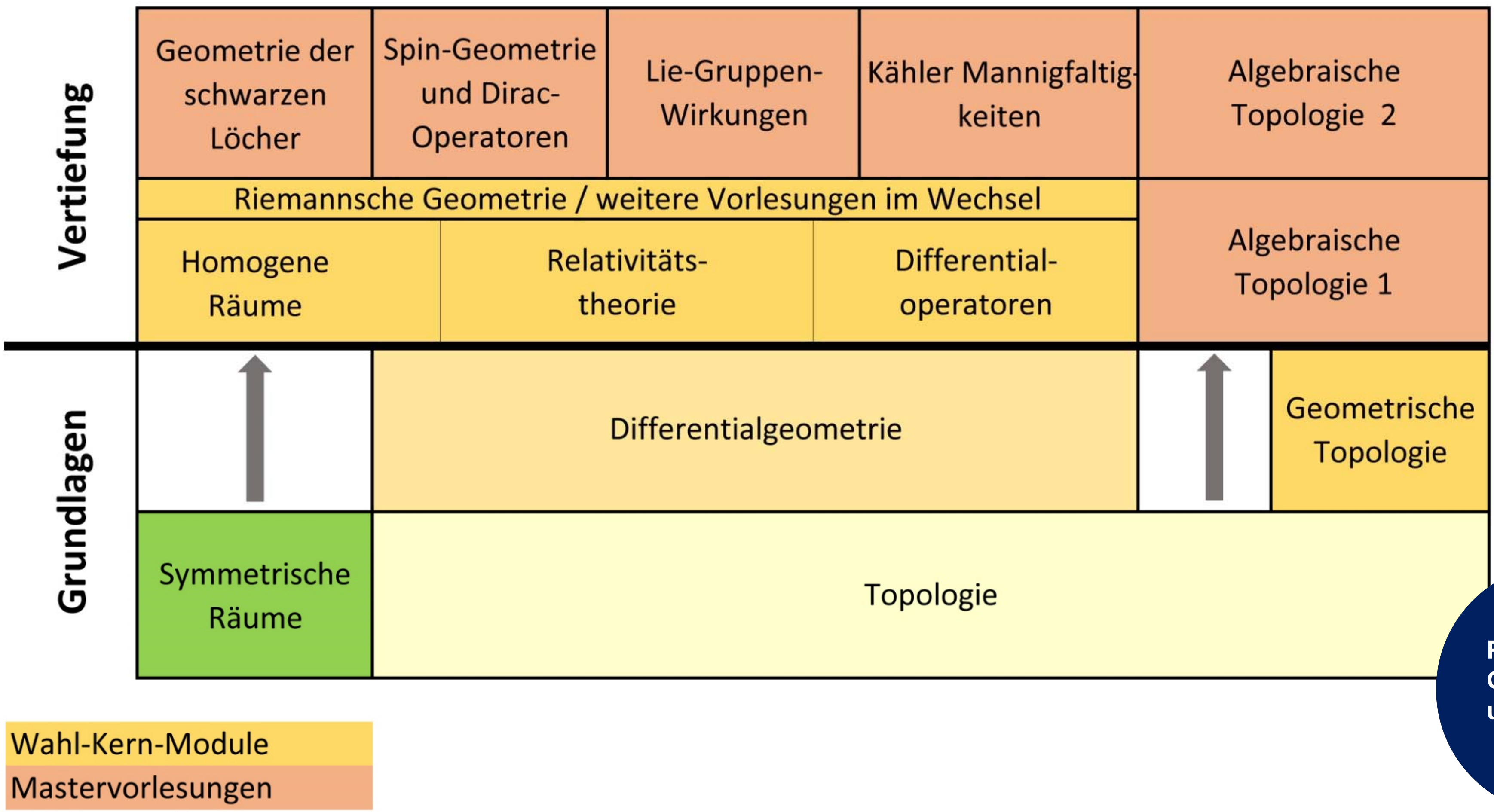
Profillinie Geometrie und Topologie

Wahl-Kernmodule und Erweiterungen im Master

Die Profillinie basiert auf den Vorlesungen **Topologie** (SoSe) und **Differentialgeometrie** (WiSe).

In der Vorlesung **Symmetrische Räume** können die Grundlagen der Differentialgeometrie ebenfalls erworben werden. Außerdem wird die Riemannsche Geometrie angesprochen.

Vorlesungsaufbau Geometrie und Topologie

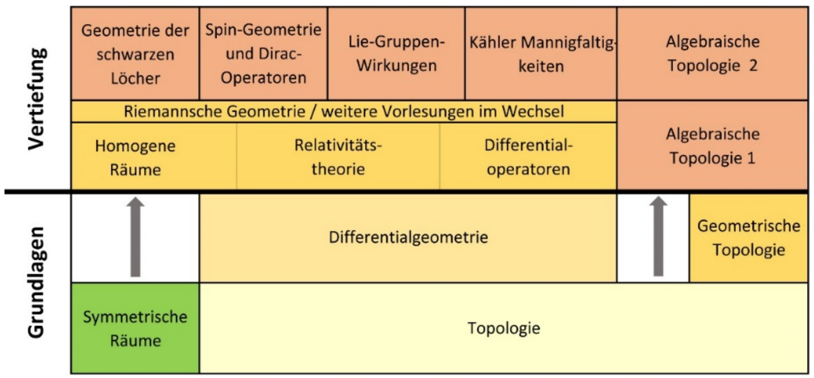


Profillinie Geometrie und Topologie

Vorlesungen in den kommenden Semestern

WiSe 2020/21	Differentialgeometrie	Priv. Doz. Dr. Anda Degeratu
SoSe 2021	Symmetrische Räume	Apl. Prof. Andreas Kollross
	Topologie	Prof. Uwe Semmelmann
	Neural Codes	Priv. Doz. Dr. Anda Degeratu
WiSe 2021/22	Differentialgeometrie	Prof. Uwe Semmelmann
	General Relativity	Priv. Doz. Dr. Anda Degeratu
	Lie-Gruppenwirkungen	Apl. Prof. Andreas Kollross
SoSe 2022	Topologie	Prof. Michael Eisermann
	Riemannsche Geometrie	Prof. Uwe Semmelmann
	The geometry of the brain	Priv. Doz. Dr. Anda Degeratu

plus vertiefende Seminare



Profillinie Geometrie und Topologie

Vorlesung Topologie

jeweils im Sommersemester
Dozenten: Prof. Michael Eisermann / Prof. Uwe Semmelmann

Inhalt der Vorlesung:
Topologie ist qualitative Geometrie, vollkommen konkret und zugleich wunderbar abstrakt. Sie untersucht grundlegende Konzepte wie

- Konvergenz und Stetigkeit,
- Kompaktheit und Zusammenhang,
- Simplizialkomplexe und Mannigfaltigkeiten,
- lokale und globale Eigenschaften,
- Homöomorphismen und Invarianten,
- Fundamentalgruppen und Überlagerungen,
- Fixpunktsätze und vieles mehr.

Voraussetzung:
Grundvorlesungen Analysis und lineare Algebra

Profillinie Geometrie und Topologie

Vorlesung Differentialgeometrie

jeweils im Wintersemester
Dozenten: Prof. Uwe Semmelmann / Priv. Doz. Dr. Anda Degeratu

Inhalt der Vorlesung:

- Studium geometrischer Objekte mit Methoden der Analysis und Topologie
- Einführung fundamentaler Begriffe, wie differenziertere Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen, Tangentialräume, Vektorfelder, Differentialformen
- Diskussion wichtiger Beispielklassen, wie z.B. Sphären, projektive Räume und homogene Räume

Voraussetzung:
Lineare Algebra und Analysis, Topologie (wünschenswert)

Profillinie
Geometrie
und Topologie

Vorlesung Symmetrische Räume

Dozent: Apl. Prof. Andreas Kollross

Symmetrische Räume sind Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die ein besonders hohes Maß an Symmetrie besitzen, sie sind eine Klasse von Beispielen, die für die Differentialgeometrie von zentraler Bedeutung ist. Symmetrische Räume sind dadurch gekennzeichnet, dass es in jedem ihrer Punkte eine Punktspiegelung gibt; der euklidische Raum und Sphären sind elementare Beispiele. Außerdem gehören projektive und hyperbolische Räume und Grassmann-Mannigfaltigkeiten zu dieser Klasse.

Symmetrische Räume sind insbesondere homogen, was eine algebraische Beschreibung ermöglicht. Diese führt zum einen dazu, dass man die symmetrischen Räume klassifizieren kann, d.h. man hat eine vollständige — nicht allzu lange — Liste der Grundbausteine. Zum anderen kann diesen algebraischen Zugang nutzen, um geometrische Größen wie Krümmungen zu berechnen und explizite Beschreibungen zu erhalten.

Inhalt der Vorlesung:

- Riemannsche Mannigfaltigkeiten,
- Geodätische Parallelverschiebung
- Krümmung,
- Liegruppen und Liegruppenwirkungen,
- homogene und symmetrische Räume,
- algebraische Beschreibung
- Klassifikation Riemannscher symmetrischer Räume.

Voraussetzung:

Grundvorlesungen über Analysis und lineare Algebra

Profillinie
Geometrie
und Topologie

Vorlesung Riemannsche Geometrie

Inhalt der Vorlesung:

- Studium gekrümmter Mannigfaltigkeiten im Wechselspiel von Geometrie und Topologie.

- Ausgangspunkt sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten versehen mit einer Riemannschen Metrik, d.h. einem punktweisen Skalarprodukt auf den Tangentialräumen

- Einführung von verschiedenen Krümmungsbegriffe:
- Riemannsche Krümmung, Schnitt-, Ricci- und Skalar-Krümmung

- Definition und Anwendungen von Geodätischen und Jakobi-Felder

- Die Vorlesung Riemannsche Geometrie kommt in verschiedenen Varianten: mit Bezug zur Relativitätstheore, mit dem Schwerpunkt Gruppenwirkungen und homogene Räume oder mit Konzentration auf Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (insbesondere dem Laplace Operator)

Voraussetzung:
Lineare Algebra und Analysis, Topologie, Differentialgeometrie

Profillinie
Geometrie
und Topologie

Für Fragen stehen Ihnen die Dozenten der Profillinie Geometrie und Topologie gerne zur Verfügung.

Profillinie
Geometrie
und Topologie