



**Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten
(Prof. Semmelmann)**

Übungsblatt 4

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $X = TM$ das Tangentialbündel. Zeigen Sie, dass es auf der Mannigfaltigkeit X ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld V gibt, dessen Flußlinien alle von der Form

$$t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$$

sind, wobei γ eine Geodätische auf M ist. Der Fluß dieses Vektorfeldes heißt der *geodätische Fluß*.

2. Sei $\phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ eine Isometrie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Beweisen Sie:

- a) ϕ bildet Geodätische auf Geodätische ab.
- b) $\phi(\exp_p(tv)) = \exp_{\phi(p)}(td\phi_p v)$ für alle $p \in M, v \in T_p M$.

3. Sei (\bar{M}, \bar{g}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subset \bar{M}$ eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Dann heißt M *total geodätisch*, falls die zweite Fundamentalform von M verschwindet: $II = 0$. Zeigen Sie, dass M genau dann total geodätisch ist, wenn jede Geodätische von M eine Geodätische von \bar{M} ist.

4. a) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von $T_p M$. Seien $\{\gamma_i\}$ die Geodätischen mit Anfangswerten $\gamma_i(0) = p$ und $\dot{\gamma}_i(0) = e_i$. Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Funktion f auf M die Formel gilt:

$$\Delta f(p) = - \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma_i)(t)$$

b) Sei $\pi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ eine Riemannsche Submersion, deren Fasern alle total geodätisch sind. Beweisen Sie für eine beliebige Funktion $f \in C^\infty(N)$ die folgende Formel für den Laplace-Operator:

$$\Delta^M(f \circ \pi) = (\Delta^N f) \circ \pi.$$